高大連結を意識した私学における中高数学教育

鈴　木　良　典（渋谷教育学園幕張中学・高等学校）

１．はじめに

現在、中等教育段階における数学の指導用内容は、幾度の学習指導要領改訂をうけて、その形を変えながら現在に至っている。しかし、ここ何度かの指導要領改訂の中身、および大学入試問題の実情を鑑みると、内容的な大枠はほぼ確定し、違いが出るとすれば、どこまでを数学ＩＡⅡＢまででおこない、どの部分をⅢＣでおこなうか、また、図形の変換を行列を用いて行うか、複素数を用いて行うか（これは、明らかに等価ではない)、統計的な処理をどの程度行うかといった程度論的な違いばかりであるといっていいだろう。

新学習指導要領（平成21年３月９日告示）においても、数学Ｃが消滅することにともない行列による１次変換がなくなり（行列の概念は数学活用に残る見通し）複素数が数学Ⅲに再び現れるなど、変更内容はこれまでと大きく変わるものではないようである。

しかし、現在の学習内容が、特に理系生徒にとって、大学進学後に専門教育を受けるための基礎学力として機能しているか、しっかり検討していく必要があろう。高校時代は、数学が得意で、将来数学を専門に学びたいと思っている生徒も、大学での抽象的な講義内容が理解できず不本意ながら、他の分野に進む生徒も卒業生をみていると数多くいるようである。

今後、少子化や生徒減少が進む中で、私立学校の役割は大学への進学実績を上げるだけではもはや十分とは言い難い。大学進学後、あるいは就職したのち社会において目覚ましい活躍をする生徒を数多く輩出していくことが今後私立学校の社会的な使命となる。数学という教科教育に話を限定すれば、理学部や工学部に進む生徒たちが知的大国日本の礎となるように中学、高校のころからしっかりとした数学的学力を涵養していく必要がある。

本稿では、これら私学における数学教育を目標としたときに、現状でのカリキュラムや学習内容が十分かどうか、またどのような内容を補いまた深化させていくべきかについて検討したい。

２．現在の中学高校における数学教育内容の分析

現在、多くの中高一貫校で行われている数学教育内容をカリキュラムの観点から、大きく３つに分けて考えることができよう。すなわち、

中学数学　→　数学ＩＡⅡＢ　→　数学ⅢＣ（新課程ではＣは廃止）

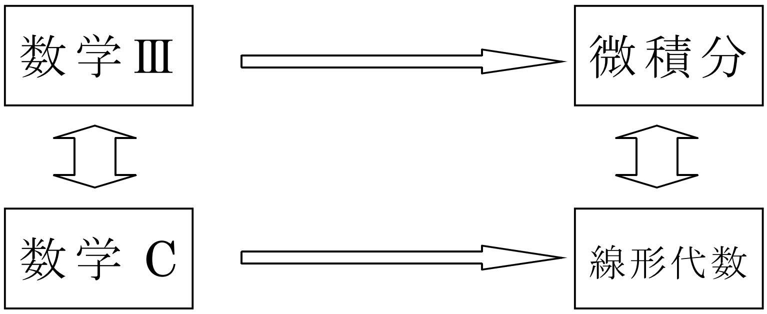
さらに、今回のテーマは高大連結をテーマにするので、大学初年級の理工系で学習する数学内容まで含めて検討していきたい。現在様々な大学で１年時に行われている数学内容をみると、そのほとんどは線形代数・微積分の二本柱であるといってよいだろう。よって

中学数学　→　数学ＩＡⅡＢ　→　数学ⅢＣ　→　線形代数・微積分

の四段階の学習内容を設定し、その**連結部分**を考えることにする。ただし、多くの私立中高一貫校では、“中学数学　→　数学ＩＡⅡＢ”の部分は、十二分に検討され、また議論されていると考えられるので、本稿では、“数学ⅢＣ　→　線形代数・微積分”の連結を中心におき、その接続をより滑らかにするという観点で“中学数学　→　数学ＩＡⅡＢ”の連結を考えていくこととする。

３．数学ⅢＣから線形代数・微積分へ

本稿の目的が、高大連結である以上、この部分が最も重要なテーマとなる。この“数学ⅢＣ　→　線形代数・微積分”の連結は、つぎのような図式で捉え議論することにしたい。



この図式において、数学Ⅲから微積分、および数学Ｃから線形代数に伸びる横向きの矢印は、抽象化、高次化（次数や次元を大きくする）、厳密化、あるいは、いわいる公理化や構造化[1]などである。一方、ここで同様に重視したいのが縦の矢印である。これは、微積分と線形代数、および数学ⅢとＣの数学的な関連を表している。それぞれの矢印、すなわち**縦の関連、横の連結**[2]について考察する。

①　微積分と線形代数の縦の関連

微積分と線形代数の関連は微分においてはっきりと表れている。すなわち微分とは、非線形な写像を局所的に線形な写像で近似するということに他ならない。より簡単にいうと、R^nからR^mへの写像 f(x) がある一点 $x_0=(a_1,\ a_2,\ ・・・,\ a_n)$ で微分可能であるとは、この点の十分近い範囲ではある m×n 行列が引き起こす一次変換とみなせることである。普通の言葉に置き換えて言うならば、複雑なものを、線形代数という非常に整理された理論体系で近似的に調べるということであろうか。

②　数学Ⅲと数学Ｃの縦の関連

では、高校範囲で数学Ⅲの内容と、数学Ｃの内容を関係づける縦の矢印に対応するものはなにかあるだろうか。これが、現在の教育内容では、ほとんど皆無と言えるのではないだろうか。確かに現行課程では、数学Ⅲの中に１次分数変換が含まれているので、１次分数変換全体と**正則な２次正方行列全体**[3]との対応関係は、私自身も授業で取り扱うようにしている。しかし、この対応は、いわいる群としての準同形であり、いわば“代数⇔代数”の関係である。数学Ⅲにおける解析的な内容を、数学Ｃにおける代数的な内容を結び付けるような素材は残念ながら見当たらない。

やはり、この縦の関連を強化するには、１変数実数値の関数を一歩踏み出て、２変数実数値関数の微分を簡単な範囲で扱うことが望ましいと考える。２変数関数 z=f(x, y) においてその変化量は次のように近できる。 $\Delta z \fallingdotseq \left(\frac{\partial z}{\partial x}\quad \frac{\partial z}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$ まさに、非線形な関数が行列で表されていることを理解するのに最も適している。

これは、高大連結のためにも非常に良いことであるし、また大学入試に関しても陰関数の微分や、接線を求める問題で大いに威力を発揮するに違いない。

③　数学Ⅲから微積分の横の連結

この部分の連結で必ず問題になるは、極限と実数の取り扱いであろう。中学高校数学において数の出発点は、自然数である。自然数に、負の整数が加わり整数が得られ、さらに２つの整数 m, n(≠ 0)を用いて、m/n で表されるものが有理数である。ここまでの数の拡張は、もちろん**厳密ではないが、構成的になされている**[4]。しかし、実数の導入となると状況は一変する。教科書の記載をみると、数学Ｉでは、循環しない無限小数を無理数と定義し、有理数と無理数を合わせて実数とする、などの定義が一般的である。この導入の仕方では、最初から実数がいわば天下り的に存在していて、それを小数で表示することによって有理数と無理数に分類できると主張しているだけで構成的に、有理数から実数がどう拡張されたかはっきりしな

い。つまり、中学高校の数学では、実数に実数を対応させる関数を主に扱うが、その定義域あるいは値域である実数が非常に漠然としたものとなっている。それ故に、関数の極限の意味がはっきりせず不定形と呼ばれる極限を、単なる式変形によって回避するという技術的な側面ばかり強調されてしまっている。有理数から実数へ数の概念を発展させるのが、高校生にとってどれほど難しいかがよくわかるところである。

では、高校生として極限を学ぶ上で教育上重要なことはなんであろうか。それは、なるべく式変形によって極限を求める形の問題よりも、不等式をもちいて極限を求める問題に重点を置いて授業を展開することであろうと考えられる。いわいる挟み込みのようなものも含まれるが、より単純に次のような例で考えてもよい。

（例）極限 $\lim_{x\to 1}|x|$ を考える。これを単にグラフを書いたり代入したりするのではなく、絶対値を外すにはどうするかを生徒に考えさせるわけである。すると x→１ から、x＞０ということが分かり絶対値が外れるわけである。このように、極限とは、１の**それ自身を除いた十分近い範囲**(5)を考えているという解析的な内容を生徒に意識させるわけである。

このような指導を心掛けることで、極限を単なる代数的な操作に終始させることなく、大学での微分積分やさらには位相空間論につながるような考えを教育することができると考える。すなわち、数学Ⅲの微積分は、なるべく不等式を用いて、解析的、位相的な題材を多く授業で扱うことがより滑らかな連結には必要であると考える。

④　数学Ｃと線形代数の横の連結

この連結は、現行の指導要領でも、かなり円滑に連結されているといっていよいであろう。大悪受験を題材にして、２次の正方行列の性質をよく調べることは、線形代数において任意サイズの行列を扱う上で重要な基礎となることはいうまでもない。ただ、ここでも扱う素材についてはよく考える必要がある。すなわち、個々の行列について四則演算や大学入試で頻出テーマである冪乗などに終始するのではなく、２次の正方行列全体の性質、行列の平面に対する作用（いわいる線形変換）、あるいは２次形式を用いた２次曲線の標準化などを積極的に扱うべきである。そうすれば、対角化を、行列を n 乗するための単なる手段としてではなく、基底の変換によって、線形変換をもっともわかりやすい形にするという線形代数に連結していく本質的な内容を意識させることができるはずである。

ここまで、数学ⅢＣと線形代数・微積分の関連、連結をより密接なものとするためには指導上どのようなことが必要かを述べてきた。すると、ここで１つ結論付けられることがある。上記①～③を授業で実践していくためには、どうしても集合をより表面に出して扱っていく必要がある。位相的な扱いには、開区間や閉区間の性質が大きくかかわる。２変数の微分を扱うには、実数の集合の直積を考えると便利である。この点を踏まえて数学ⅠＡⅡＢから数学ⅢＣへの連結を考えてみることにする。

４．数学ⅠＡⅡＢから数学ⅢＣへ

先に述べたように、この部分の連結を円滑に行うには、数や文字などの数量的な概念から、数の集まりや平面ベクトル全体などの集合概念に論理を展開する必要がある。そのための素材は非常に数多く存在している。例えば、直線 y = x といった場合には、条件 y = x を満たす点の集合、すなわち $\{(x,\ y)|y=x\}$ のことであり、ある意味では省略した書き方である。同様に、値域が y ≧ 3 という表現も実際は、{ y| y ≧ 3} のことである。これを理解すれば、軌跡の問題などで、曲線が集合としていろいろな形に表現されることが理解でき、高校生が理解しにくい軌跡の限界等の説明にも非常に有用である。したがって、集合概念およびそれを表現する上で重要な述語論理については、ちょっとした素材を生かすことで、生徒になじませていくことができると考える、集合そのものについては、場合の数等と組み合わせて、有限集合を例にとって、共通部分、和集合、さらに直積等を丁寧に指導すればよい。

集合が難しくなるのは、無限集合を扱う時であり、有限集合に限れば非常に分かりやすい概念である。無限集合については、条件とそれを満たす集合の表現について触れておく程度で、具体例としては、数直線上の区間をとればよい。また、可能であれば開区間や閉区間についても扱ってよいと考えられるが、個々の位相的な性質には立ち入らず、集合算を行う程度がよいだろう。これらの指導を工夫することで数学

ⅠＡⅡＢから数学ⅢＣへの連結が円滑に進むだけでなく、大学における数学が集合と写像で表現されていることを考えると、高大連携にとっても非常に重要であると考えられる。

５．結論

これまでの議論をまとめると次のようになるであろう。

①集合について、有限集合や区間など簡単な例を用いて、直積まで指導し、値域や平面上の曲線など集合が数学のさまざまな場面で利用されているが高校では省略されていることを生徒に認識させる。

②２変数関数が、空間における曲面を表すことを理解させ、その微分を考えることで、数学Ⅲと数学Ｃを密接に関係づけておく。

③集合を考えることで、行列全体の性質や、実数の位相的性質などを生徒に自然な形で意識を持たせていく。これによって数学ⅢＣから線形代数への連結が円滑になる。

高校数学では、集合概念を使うことを意図的に避けている感が否めない。かつて**数学の現代化**(6)が叫ばれていた当時と正反対である。確かに、公理主義や構造主義は無制限に中学高校の教育現場に導入するのは非常に困難であり、あまり意味がない。しかし集合論そのものは、**素朴に導入する**(7)分には決して理解しがたいものではない。直積も２つまでに限定し、べき集合のような**あまり大きな集合を扱わなければよい**(8)。

本稿で述べたような数学教育を実践することで、高大の連結がかなりの部分でスムーズになることが期待される。

６．最後に

今年度、私個人は、高校２年生の理系生徒を担当したが、その最後に、授業で習った定理のなかで一番印象に残ったものをアンケートとして聞いてみた。結果は次の通りであった。（対象；同じ授業を受けた生徒37人に対して）

ロピタルの定理・・・・10人	マクローリン展開・・・７人	オイラーの公式・・・４人
ケーリーハミルトン・・３人	その他・・・・・・・・６人	特になし・・・・・・７人

この結果をみると、答えの検算や、記述では使えないが答えがすぐ出るという意味でロピタルの定理が印象に残った生徒が多かった。当初、オイラーの公式が一番多いのではないかと予想していたので、この結果は意外であった。また、マクローリン展開が多いのも予想外であった。初等的な超越関数が、具体化されたというイメージを持った生徒が多いということであろうか。その他としては、逆三角関数の概念、区分求積などがあげられていた。残念ながら、特になしという生徒も多いので、より高大連結を意識した授業を展開することで、問題解決至上主義を脱却し、数学理論の美しさや奥の深さを理解し、大学進学後にも十分な学力を発揮できる生徒が増えることを期待している。

注：（１）ヒルベルト流の形式的公理論、およびブルバキの構造主義をさしている。
（２）ここでは、数学的な内容の関連を縦の関連、教育的な連結を横の連結と呼ぶことにした。
（３）いわいる２次の一般線形群のことである。
（４）整数から有理数への拡張は、代数的な局所化と呼ばれるものである。
（５）近傍からその値を除いた集合である。
（６）この当時は小学校で集合論が教えられていた。（昭和43年　小学校指導要領）
（７）集合を素朴に、よく区別できるものの集まりとして導入し、ツェルメロ＝フレンケル集合論のような公理的集合論は扱わないという意味である。
（８）集合の集合のように、素朴な集合論を無制限に使うと逆理に陥ってしまう。

参考文献

文部科学省（平成21年３月告示）高等学校学習指導要領

吉田明史・飯高茂（2000）高等学校学習指導要領の展開　数学科編　明治図書