

中高一貫教育における数学科教材の提案

吉 武 弘 明（逗子開成中学校・高等学校）

1. はじめに

中学から高校にかけての数学の授業を通して、子どもたちは、正の数・負の数の計算から微積分の初歩までを学習する。そして、「詰め込み教育」か「ゆとり教育」かの違いはあっても、そこで得られた知識や技術が、やがては大学入試に収斂し、使い捨てのモノとして消費されていくことになる。

これは、結果が重視される今の世の中においては必然的な流れではあるが、本来は、数学に限らず何かを学ぶということは、利害得失とは関わりなく、“楽”ではないが“楽しい”作業であるはずであり、ものの見方や考え方を豊かにしてくれるものではないだろうか。

朝日新聞「社説」（1995）に次のようなことが記されていたことを指摘しておきたい。

「なぜ、何のために、学校で学ぶ必要があるのか。子どもたちのこの無言の間に耳を澄ませ、振り出しに戻って教育を考え直す時期なのではありませんか。経済発展や国家社会のためでなく、〈子どもから〉出発する教育にです。『経済の機関車から教育の車両を切り離せ』と、鋭く指摘した OECD 調査団の報告（71年）は、今なお新鮮です。」

2. “基本”の難しさ（＝面白さ）

高校で学ぶ「ベクトル」の分野において、**内積**が登場する。これは、2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対して、それらのなす角を θ とおくとき、次の式で定義される量である。

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \dots\dots (*)$$

これを用いると、例えば図1のように、 $\triangle ABC$ の頂点B、Cから対辺AC、ABに下した垂線の足を

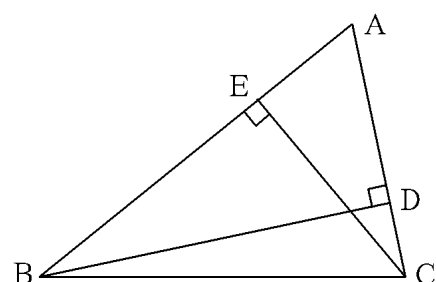


図1

それぞれD、Eとすると、2つの等式

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = AB \cdot AE$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos A = AC \cdot AD$$

が成り立つが、内積の定義より、明らかに

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \dots\dots ①$$

であるから、

$$AB \cdot AE = AC \cdot AD \dots\dots ②$$

が成り立つことが分かる。

②は、**方べきの定理**と言われるものの特別な場合であり、図を見ても、必ずしも自明には思えないけれども、同じことを述べているはずの①は自明に見えるから不思議である。こういうところにも、内積を用いることの“よさ”（面白さ）があると思う。

内積は基本的概念であるが、生徒にとっては実感しにくく、教師にとっては教えにくいものの1つである。その理由は、2つのベクトルから定義された量（*）の抽象性にある。しかし、ここで挙げた例に限らず、内積を用いることによって見通しがよくなるという事例は多い。

子どもたちには、数学において「基本」といわれる概念が、どのような場面で活用されているかを知るだけでなく、それがいかに有用であるかを説明できるようになってほしい。時間と労力を必要とはするが、そのことが、ものの見方を豊か（客観的）にしてくれるからである。

3. 海外の教科書より

日本の教科書が概ね200ページ前後であるのに対して、海外の教科書の中には300ページを超えるものも珍しくない。それは、説明が丁寧であるということもあるが、様々な日常的な具体例や歴史的な話題を載せているためでもある。今回、放物線に関する部分に注目して調べてみたが、日本では、2次関数としての代数的側面を数学Ⅰで学び、円錐曲線としての図形的側面を数学Ⅲで学ぶことになっているのに対し、海外では、これらを一緒に学べるように編まれた教科書が見られる。

例えば韓国では、2次関数の章の最後に放物線の焦点の性質が載っていて、ポエニ戦争でアルキメデスがその性質を利用した器械を開発してローマ軍と戦ったという話が添えられている。

アメリカの教科書では、2次関数の導入として三角数や四角数が用いられている。自由落下の法則を実際に確かめることは困難だが、数の性質は机上で容易に確かめられるだろう。また、「2次関数とは何か？」という節を設け、その中でバスケットボール選手とノミのジャンプ力を比較させている。また余談として、ノミのサーカスの歴史についても触れている。

ドイツの教科書は、焦点の性質に触れるだけではなく、円錐の切断面に放物線が現れるところの写真や放物線の作図法も紹介している。また、章末問題には、「人間の歯並びの形と放物線との関連性」について問うた“生物学的な問題”も見られた。

ここで日本の教科書に戻ってみれば、要点を押さえてよくまとめられてはいるが、「2次関数とは何か？」といった項目は見られず、やはり計算技能の習得を意識したものであることが感じられる。それは、高校での学習の延長線上に大学入試があるというよりも、高校の授業内容の方が大学入試によって規定されているという現実があるからではないだろうか。

4. 教材の具体例

以上のことを踏まえ、中高6年間の流れを生かした放物線に関する教材（読み物）を考えてみたので、いくつか紹介したい。既習事項の相互関係の理解や基礎・基本の確認になることを意識したものであり、従って、必ずしも教科書の流れに沿ったものではないことを注意しておく。

例1 円錐曲線としての放物線

古代ギリシアの三大難問の1つに、「立方体の体積を、立方体のまま2倍にせよ」というものがある（**立方体倍積問題**）。最初の立方体の一辺の長さを a とすると、この問題は、今日の記号によれば、

$$x^3 = 2a^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

をみたす x を求めることに等しいが、メナイクモスは、これを平面上の2つの曲線

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

の交点を求める問題としてとらえなおした。④の2つの曲線が放物線を意味していることに加えて、3次元の問題が2次元の問題に還元されたことにも注意したい。

放物線は、楕円や双曲線とともに円錐曲線といわれるものだが、このように、どれも数学の難問を解くために（人工的に）考案されたものであった。ところがそれから2000年の後、ガリレオは投射体が放物線を描くことを示し、ケプラーは惑星の軌道が楕円であることを示した。つまり、人間が頭の中で考え出したものが、2000年の時を経て、（身近な）現実のものとなったわけである。当時の人々は、ここに何か神秘的なものを感じたのではないだろうか。

例2 放物線の性質

1つの定点 F と1つの定直線から等距離にある点の軌跡は放物線を描く。 F は焦点と呼ばれる。

放物線 C 上に点 P をとり、 P から l におろした垂線の足を H 、 $\angle FPH$ の二等分線を m とすると m は点 P における接線である。

証明は、中学で学ぶ「三角形の合同条件」と「背理法」を理解していれば可能である。この結果より、放物線を軸の周りに1回転して得られる面（放物面）に、軸に平行に進んできた光が反射するとき、

光はすべて焦点に、しかも同時に到達する

ということがわかる（図2）。これがパラボラアンテナの原理であり、焦点が焦点と呼ばれる所以である。

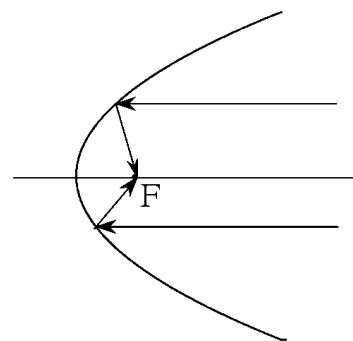


図2

例3 アルキメデスの活躍

ポエニ戦争でローマ軍がシラクサを攻囲したとき、放物線の焦点の性質を武器に戦ったのがアルキメデスであった。これについては、塩野（1993）に生き生きと描かれているので、少し引用したい。

「紀元前213年の春を期して、シラクサ目指して南下したローマ軍だったが、降伏勧告を拒否したシラクサへの攻城戦をはじめてからは、まるで元気がなくなってしまった。シラクサが全都をあげて、必死の防戦に立ちあがったからではない。シラクサの都市部が天然の要害の地に位置していたこともあるが、原因はそれだけではなかった。シラクサには、アルキメデスがいたのである。1人の人間の頭脳の力が4個軍団にも匹敵する場合があることを、ローマ人は体験させられることになった。」

例4 ガリレオと数学

近代科学の父と言われるガリレオは、当初は医者を目指していたのだが、それが数学に魅了され、古代ギリシアのユークリッドやアポロニウスを研究し、それに精通するまでになる。

例えば、円錐を母線に平行な平面で切断すると放物線ができることを、彼は方べきの定理を用いて示しているが、それはアポロニウスの論法とは異なるものである。

また、物理学におけるガリレオの功績は**慣性の法則**の発見にあるといわれるが、それは、彼が数多くの実験から得られた客観的事実を踏まえ、そこに数学的な論証（本質的には背理法）を加えることで得られた自然な結論であった。「実験を通して法則性を導き出す」というのが当時としては画期的な考え方だったのであり、この法則の出現によって、地動説が説得力をもつようになった。

例5 定積分と自由落下の法則

現在、高校の教科書では、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数})$$

が定積分の定義となっているが、本来はこれが**微積分の基本定理**とされるものであり、これを定義にしてしまえば、（説明は楽になるが）生徒が感動をおぼえることは期待できない。例えば、

曲線 $y = x^2$ 、直線 $x = 1$ 、 $x = 2$ 、および x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

という問題に対しては、まずは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

という定積分本来の定義に基づいて説明しておきたい。すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$ という計算を実際に体験させるのである。

ガリレオは、物体が自由落下するときの落下距離が落下時間の2乗に比例することを論証したが、そのときの方法も本質的にはこれと同様であった。

5. まとめと今後の課題

本稿では、放物線に関わる古典を中心にその歴史を振り返ってみたが、その豊かさを改めて感じ、いくつかの教材化を試みる事ができた。今後は、他のテーマにも焦点をあてながら、さらに探究を続けていきたいと考えている。

最後になりますが、今回このような機会を与えていただいたことに、心より感謝申し上げます。

引用・参考文献

1. 朝日新聞「社説」、1995年4月23日付
2. G・ガリレイ、2007年、『新科学対話（下）』、岩波書店
3. V・J・カッツ、2005年、『数学の歴史』、共立出版
4. G・ポーヤ、2007年、『自然科学における数学的方法』、シュプリンガー・ジャパン
5. 塩野七生、1993年、『ローマ人の物語Ⅱ・ハンニバル戦記』、新潮社